

# «ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ»

## Пояснительная записка к рабочей программе по элективному курсу «Задачи с параметрами» 10 -11 класс

Настоящая программа курса составлена на основе книги П.И.Горштейна, В.Б. Полонского, М.С.Якира «Задачи с параметрами». При составлении рабочей программы учтены рекомендации инструктивно-методического письма «О преподавании математики в 2017-2018 учебном году в общеобразовательных учреждениях Челябинской области.

Образовательная программа «Задачи с параметрами» направлена на реализацию концепции стандарта образования, на расширение школьного курса математики, подготовку к итоговой аттестации.

Отличительной особенностью курса является систематизация и классификация заданий с параметром и методов их решения по основным разделам курса математики 10-11 класса. Разделы программы свободно могут перемещаться в рамках курса, без ущерба для общей цели и результата, в зависимости от основной программы.

На ЕГЭ, вступительных экзаменах, олимпиадах часто встречаются задачи с параметрами. В школьном курсе математики эти задачи рассматриваются пока крайне редко, бессистемно, поэтому при решении таких задач у выпускников обычно возникают затруднения. Но в государственном стандарте образования по математике отмечается, что в ближайшем будущем задачи с параметрами будут введены в школьный курс. В связи с чем возникла необходимость создания такой программы. Курс состоит из 13 параграфов и 3 зачетных работ.

Основными *целями и задачами* программы стали:

- повышение математической культуры учащихся в рамках школьной программы по математике;
- систематизация знаний и умений по стержневым темам курса математики старшей школы;
- формирование и развитие у учащихся логического мышления, интеллектуальных и практических умений в области решения уравнений, неравенств, содержащих параметр;
- умения самостоятельно приобретать и применять знания в различных ситуациях;
- развитие творческих способностей; коммуникативных навыков, которые способствуют развитию умений работать в группе;
- формирование навыков исследовательской деятельности учащихся; умение оценивать свои способности к математике и умению делать осознанный выбор профиля дальнейшего обучения;
- подготовка к итоговой аттестации обучающихся.
- 

**Прогнозируемый результат:** овладение учащимися навыками решения уравнений и неравенств, содержащих параметры, интерпретации результатов своей деятельности; умением делать выводы и обсуждать результаты; успешная сдача ЕГЭ.

**Курс рассчитан на два года, 70 часов (один час в неделю: 10 класс-35ч, 11 класс - 35ч.).**

## Тематический план

№ П.П	Раздел программы	Количество часов
1	Параметр: понятие, общие методы решения, поиск решений уравнений, неравенств, их систем	2
2	Методы решения задач с параметром,	2
3	Линейные уравнения и неравенства, уравнения и неравенства приводимые к линейным	2
4	Квадратные уравнения и неравенства	4
5	Дробно-рациональные уравнения и неравенства	5
6	Графические интерпретации. Свойства функций в задачах с параметрами.	3
7	Тригонометрия	9
8	Показательные уравнения и неравенства	7
9	Зачет	1
10	Логарифмические уравнения и неравенства	6
11	Иррациональные уравнения и неравенства	6
12	Системы уравнений и неравенств	5
13	Задачи математического анализа	7
14	Параметры в заданиях ЕГЭ	10
15	Обобщающее занятие. Зачет	1

### Содержание программы:

#### **Тема 1. Параметр: понятие, общие методы решения**

Основная цель-определение уравнения и неравенства с параметром, области определения уравнения с параметром; общие приемы решения заданий с параметром. Учащимся раскрывается содержание понятия параметр, его интерпретация, основные теоремы.

#### **Тема 2. Методы решения задач с параметром.**

Основная цель- введение различных методов решения задач с параметром. Учащимся дается характеристика каждого метода решения задач с параметром; обоснование выбора метода решения. в зависимости от условия, вопроса задачи.

#### **Тема 3. Линейные уравнения и неравенства, уравнения и неравенства приводимые к линейным.**

Основная цель- формирование навыка решения линейных уравнений и неравенств с параметром, а также уравнений и неравенств, приводимых к ним.

#### **Тема 4. Квадратные уравнения и неравенства.**

Основная цель- формирование навыка решения квадратных уравнений и неравенств с параметром, исследовать квадратный трехчлен, знаки корней в зависимости от параметра. определение квадратного трехчлена и квадратного уравнения, решения уравнений выделением полного квадрата, уравнений по формуле, методы решения неполных квадратных уравнений. Методы решения квадратных неравенств. В ходе практических занятий рассматриваются задания различной степени сложности,

#### **Тема 5. Дробно-рациональные уравнения и неравенства.**

Основная цель- формирование навыка решения дробных уравнений, содержащих параметр, различных типов и различными методами.

**Тема 6. Графические интерпретации. Свойства функций в задачах с параметрами.**

Основная цель- познакомить учащихся с графическим приемом решения заданий с параметрами., формировать умение использовать свойства функций при решении задач с параметрами. На практических занятиях рассмотреть свойства монотонности функций, ограниченности области значений, экстремальные свойства.

**Тема7. Тригонометрия.**

Основная цель-введение методов решения тригонометрических задач с параметром: преобразование выражений, решение уравнений и неравенств. В ходе практических занятий рассматриваются задания различной степени сложности,

**Тема 8. Показательные уравнения и неравенства.**

Основная цель-формирование навыка оценки основания степени, решения показательных уравнений и неравенств различного вида.

**Тема9. Зачет.**

Основная цель- подведение итогов изучения курса «Параметр» в 10 классе.

**Тема 10. Логарифмические уравнения и неравенства.**

Основная цель- ознакомить учащихся с основными приемами решения логарифмических задач, содержащих параметр, их свойствами; привлечь внимание к поиску рациональных способов решения..

**Тема 11. Иррациональные уравнения и неравенства.**

Основная цель-закрепление навыков решения иррациональных уравнений и неравенств, применения теорем о равносильности; формирование навыков применения общих методов к решению задач с параметром.

**Тема12. Системы уравнений и неравенств.**

Основная цель-закрепление навыка применения различных методов решения заданий с параметром, их применения для систем уравнений и неравенств.

**Тема 13. Задачи математического анализа .**

Основная цель-формирование навыков решения задач на наибольшее и наименьшее значение, нахождения минимумов и максимумов функции в задачах содержащих параметр.

**Тема 14. Параметр в заданиях ЕГЭ.**

Основная цель-систематизация и обобщение знаний учащихся о методах решения задач с параметром, их применения к решению заданий ЕГЭ.

**Тема 15. Обобщающее занятие.**

Основная цель - подведение итогов изучения курса «Параметр», защита проекта.

Программа предусматривает: лекций -11, проверочных работ-5 , самостоятельных работ - 5, тестов - 3 , зачетов - 3.

### Календарно-тематическое планирование

№	Тема занятия	дата	Форма проведения	Форма контроля
<b>10 класс</b>				
1	Параметр: понятие, общие методы решения		Лекция	
2	Параметр: понятие, общие методы решения		Практикум	
3	Методы решения задач с параметром		Лекция	
4	Методы решения задач с параметром		Практикум	
5	Линейные уравнения и неравенства, уравнения и неравенства приводимые к линейным		Лекция	
6	Линейные уравнения и неравенства, уравнения и неравенства приводимые к линейным		Практикум	Практическая работа
7	Квадратные уравнения и неравенства		Лекция	
8	Квадратные уравнения и неравенства		Практикум	
9	Квадратные уравнения и неравенства		Практикум	
10	Квадратные уравнения и неравенства		Практикум	Самостоятельная работа№1
11	Дробно-рациональные уравнения и неравенства		Лекция	
12	Дробно-рациональные уравнения и неравенства		Практикум	
13	Дробно-рациональные уравнения и неравенства		Практикум	Тест
14	Дробно-рациональные уравнения и неравенства		Практикум	
15	Дробно-рациональные уравнения и неравенства		Практикум	
16	Дробно-рациональные уравнения и неравенства		Практикум	Самостоятельная работа№2
17	Графические интерпретации. Свойства функций в задачах с параметрами.		Лекция	
18	Графические интерпретации. Свойства функций в задачах с параметрами.		Практикум	

19	Графические интерпретации. Свойства функций в задачах с параметрами.		Практикум	
20	Тригонометрия		Лекция	
21	Тригонометрия		Лекция	
22	Тригонометрия		Практикум	
23	Тригонометрия		Практикум	
24	Тригонометрия		Практикум	
26	Тригонометрия		Практикум	
25	Тригонометрия		Практикум	Самостоятельная работа №3
25	Тригонометрия		Практикум	
27	Тригонометрия		Практикум	
28	Показательные уравнения и неравенства		Лекция	
29	Показательные уравнения и неравенства		Практикум	
30	Показательные уравнения и неравенства		Практикум	
31	Показательные уравнения и неравенства		Практикум	
32	Показательные уравнения и неравенства		Практикум	Проверочная работа
33	Показательные уравнения и неравенства		Практикум	
34	Показательные уравнения и неравенства		Практикум	
35	Зачет			
<b>11 класс</b>				
1	Логарифмические уравнения и неравенства		Лекция	
2	Логарифмические уравнения и неравенства		Практикум	
3	Логарифмические уравнения и неравенства		Практикум	
4	Логарифмические уравнения и неравенства		Практикум	
5	Логарифмические уравнения и неравенства		Практикум	
6	Логарифмические уравнения и неравенства		Практикум	
7	Иррациональные уравнения и неравенства		Лекция	
8	Иррациональные уравнения и неравенства		Практикум	
9	Иррациональные уравнения и неравенства		Практикум	
10	Иррациональные уравнения и неравенства		Практикум	

11	Иррациональные уравнения и неравенства		Практикум	
12	Иррациональные уравнения и неравенства		Практикум	Самостоятельная работа
13	Системы уравнений и неравенств		Лекция	
14	Системы уравнений и неравенств		Практикум	Тест
15	Системы уравнений и неравенств		Практикум	
16	Системы уравнений и неравенств		Практикум	
17	Системы уравнений и неравенств		Практикум	Проверочная работа
18	Задачи математического анализа		Лекция	
19	Задачи на движение		Практикум	
20	Задачи на работу		Практикум	
21	Задачи на проценты		Практикум	
22	Задачи на сплавы		Практикум	
23	Задачи на растворы		Практикум	
24	Задачи математического анализа		Практикум	Тест
25	Параметр в заданиях ЕГЭ		Практикум	
26	Параметр в заданиях ЕГЭ		Практикум	
27	Параметр в заданиях ЕГЭ		Практикум	
28	Параметр в заданиях ЕГЭ		Практикум	
29	Параметр в заданиях ЕГЭ		Практикум	
30	Параметр в заданиях ЕГЭ		Практикум	
31	Параметр в заданиях ЕГЭ		Практикум	
32	Параметр в заданиях ЕГЭ		Практикум	Самостоятельная работа №5
33	Параметр в заданиях ЕГЭ		Практикум	
34	Параметр в заданиях ЕГЭ		Практикум	
35	Обобщающее занятие.			Зачет

#### Методические рекомендации:

**Тема 1.** Лекция носит установочный характер и готовит учащихся к практической деятельности, а именно к решению упражнений, связанных с решением заданий с параметром. Во время практических занятий учащиеся коллективно, а затем по группам работают над примерами различной степени сложности, содержащими параметр.

**Тема 2.** Из содержания лекции учащиеся знакомятся с методами решения задач с параметрами: графический, аналитический, координатно-параметрический. Практические занятия рекомендуется проводить в форме фронтальной работы, отрабатывая применение различных методов решения задач с параметром. Завершающим этапом проводится практическая работа.

**Тема 3.** Краткая лекция на основе базовых знаний о линейных уравнениях и неравенствах, способах их решения. На практических занятиях отрабатываются навыки решения линейных уравнений и уравнений и неравенств и систем линейных уравнений и

неравенств с параметром, графическим и аналитическим способом. Итогом служит проверочная работа.

**Тема 4.** Краткая лекция на основе базовых знаний о квадратных уравнениях и неравенствах, способах их решения. На практических занятиях отрабатываются навыки решения различных типов квадратных уравнений и неравенств с параметром, графическим и аналитическим способом, решения уравнений выделением полного квадрата, решения уравнений по формуле, методы решения неполных квадратных уравнений. Рассмотреть примеры применения теоремы Виета, обратной теореме Виета, определение знаков корней квадратного уравнения в зависимости от значений параметра, теоремы о расположении корней относительно заданной точки или заданного промежутка, алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции. Итоговое занятие по теме- проверочная работа.

**Тема 5.** Практические занятия проводить используя как коллективную форму обучения, так и индивидуальную. На практических занятиях рассматривать решения уравнений, неравенств начиная с простых и заканчивая содержащими несколько параметром, используя метод интервалов.

**Тема 6.** На первом занятии целесообразно повторить свойства и графики основных функций. Определить, на каких свойствах основано решение задач с параметрами. На практических занятиях следует обратить внимание на аналитические и графические приемы решения задач. Провести самостоятельную работу с целью выявления уровня умения находить способы решения задач такого типа. В завершении- практикум по решению уравнений неравенств.

**Тема 7.** На первых занятиях целесообразно повторить теоретический материал по решению тригонометрических уравнений и неравенств, формул преобразования тригонометрических выражений. На практических занятиях следует обратить внимание на аналитические и графические приемы решения задач. При решении простейших неравенств необходимо опираться на геометрическую интерпретацию. Самостоятельная работа- итог работы по теме. В завершении- практикум по решению неравенств.

**Тема 8.** Из содержания лекции учащиеся на базовом уровне повторяют основные свойства показательной функции, методы оценки основания степени. Практические занятия рекомендуется проводить в группах, по карточкам-заданиям, с последующим обсуждением решения, его рациональности. Завершающим этапом проводится проверочная работа.

**Тема 9.** Завершающим этапом изучения элективного курса в 10 классе является зачет, который проводится в виде проверочной работы.

**Тема 10.** Из содержания лекции учащиеся повторяют определения, свойства логарифмов, методы решения уравнений и неравенств. Практические занятия посвящаются отработке навыков решения задач с параметром как в основании логарифма, так и в подлогарифмируемом выражении; целесообразна как работа фронтальная, так и групповая.

**Тема 11.** Краткая лекция на основе базовых знаний о системах уравнений и неравенств, типах и способах их решения, готовит учащихся к выработке навыков решения систем с параметром. Практические занятия необходимо посвятить решению систем как с одним, так и с несколькими параметрами. Итогом- проверочная работа по теме.

**Тема 12.** При решении задач математического анализа с параметром следует рассмотреть задачи на наибольшее и наименьшее значение, максимум и минимум.

**Тема 13.** Решение заданий ЕГЭ с параметром проводится в форме практикумов, где рассматриваются задачи с параметром из текстов КИМов за прошлые годы и демонстрационных вариантов. Самостоятельная работа – форма контроля навыка решения заданий с параметром из текстов ЕГЭ.

**Тема 14.** На заключительном занятии подводятся итоги изучения элективного курса «Параметр», проверочная работа. Проводится защита собственного проекта по курсу «Параметр»

**Реализация программы обеспечивается учебными пособиями:**

1. Задачи с параметрами./П.И.Горнштейн, В.Б.Полонский.-3-е издание дополненное и переработанное. - М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005.-336с.
2. Углубленное изучение алгебры и математического анализа: Метод.рекомендации и дидакт. материалы: Пособие для учителя/М.Л.Галицкий, М.М.Мошкович.-3-е изд.дораб.- М.:Просвещение, 1997.-352с.
3. Примеры с параметрами и их решения. Пособие для поступающих в вузы./В.С.Краморов.- М.:АРКТИ, 2000.-48с.
4. Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учеб.пособие для учащихся 7-11 кл./Е.В.Галкин Челябинск: «Взгляд», 2004.-448с.
5. Олимпиадные задания по математике.5-11 классы/авт.-сост. О.Л.Безрукова.-Волгоград: Учитель, 2009.-143с.
6. Решение задач повышенной сложности. Алгебра. Элементарные функции. 8-11 классы.- М.:АРКТИ,2004.-120с.
7. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10-11 кл./И.Ф.Шарыгин.- М.: Просвещение, 1991.-384с.
8. Практикум по математике: учеб. пособие для учащихся старших кл./ А.Ю.Эвнин.- Челябинск: Взгляд, 2009.-256с.
9. ЕГЭ.Математика: Справочные материалы, контрольно-измерительные упражнения, задания с развернутым ответом: в 2ч./ А.К.Дьячков, Н.И.Иконникова, В.М.Казак; под общ. ред. А.К.Дьячкова.- Челябинск: Взгляд, 2006.-411с.
10. Задачи с параметрами и их решение: Тригонометрия: Уравнения, неравенства, системы. 10 кл.- 2-е изд.исп. и дораб.- М.: АРКТИ, 2004.-64с.
11. <http://www.intellectcentre.ru> – сайт издательства «Интеллект-Центр», где можно найти учебно-тренировочные материалы, демонстрационные версии, банк тренировочных заданий с ответами, методические рекомендации и образцы решений
12. <http://www.fipi.ru> - портал информационной поддержки ЕГЭ



## **Приложения**

**Тема 3. *Линейные уравнения и неравенства, уравнения и неравенства приводимые к линейным.***

## Дидактические материалы

Решите уравнения:

● А. 1.  $(a^3 - a^2 - 4a + 4)x = a - 1;$

2.  $\frac{x}{a} + \frac{a}{3} + \frac{x+a}{a+3} = 1;$

3.  $\frac{x+a}{1+a} = \frac{x-a}{2+a}.$

Решите уравнения:

● Б. 1.  $\frac{2(a+1)x}{a} = 3(x+1) + \frac{7}{a};$

2.  $\frac{a+3}{a+2} = \frac{2}{x} - \frac{5}{(a+2)x};$

3.  $\frac{b-5}{x+1} - \frac{7+3b}{x-2} = \frac{2bx-5}{x^2-x-2}.$

Тема 4. Квадратные уравнения и неравенства.

## Дидактические материалы

- А. 1. При каких значениях параметра  $a$  равны между собой корни квадратного уравнения  $x^2 - (2a + 1)x + 2a = 0$  ?
2. Найдите значения  $p$ , при которых уравнение  $3x^2 - 2px - p + 6 = 0$  имеет два корня.
3. Найдите наименьшее целое значение параметра  $a$ , при котором уравнение  $x^2 - 2ax + 4 = 0$  не имеет действительных корней.
4. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $a(x^2 + x + 1) = x^2 - 4x - 7$  имеет один корень?
5. При каких значениях параметра  $a$  один из корней уравнения  $x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 2 = 0$  равен удвоенному другому?
6. В уравнении  $2x^2 + ax - 6 = 0$  один из корней равен 3. Найдите  $a$  и второй корень.
7. При каких значениях параметра  $a$  оба корня уравнения  $(a - 1)x^2 - 2ax + a + 3 = 0$  положительны?
8. При каких значениях параметра  $m$  оба корня уравнения  $x^2 + 2(m - 1)x + 4m - 7 = 0$  отрицательны?
9. Решите уравнение  $(k - 5)x^2 + 3kx - (k - 5) = 0$ .
10. Решите уравнение  $\frac{x+2}{a+1} = \frac{2x-a-1}{x-2}$ .

Тема 5. Дробно-рациональные уравнения и неравенства.

**Решите неравенства:**

● А. 1.  $3(2a - x) < ax + 1;$

2.  $\frac{x}{x-2} < \frac{2b+1}{(b-3)(x-2)};$

3.  $2ax + \frac{a-1}{2} \geq (a+2)x.$

● Б. 1.  $\frac{2x-1}{m+1} - \frac{x+1}{2(m-1)} > \frac{2x-3}{m-1};$

2.  $\frac{ax}{a-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4};$

3.  $\frac{ax+1}{3} + \frac{4a-x}{2} < \frac{a^2}{6}.$

● В. 1.  $\frac{2x+1}{(a-1)x} - \frac{a+5}{a-1} > \frac{3}{x};$

2.  $\frac{m}{mx+1} + \frac{1}{mx-1} < \frac{1}{1-m^2x^2},$  если  $m > 0;$

3.  $|ax+1| \leq \frac{x}{2}.$

- Б. 1. Уравнение  $|x^2 - 2x - 3| = a$  имеет ровно три корня. Найдите значение параметра  $a$ .

2. Найдите наибольшее целое значение параметра  $a$ , при котором уравнение  $x^4 - 2x^2 + 0,125a = 0$  имеет четыре действительных различных корня.

3. При каком значении параметра  $a$  сумма квадратов корней уравнения  $x^2 + (2 - a)x - a^2 + 1 = 0$  принимает наименьшее значение?

4. Решите уравнение  $\frac{x^2 + 1}{n^2x - 2n} - \frac{1}{2 - nx} = -\frac{x}{n}$ .

5. Решите уравнение  $\frac{2a - x}{x + a - 3} + \frac{3x - 2a}{x - a + 1} = 4$ .

6. Решите уравнение  $\frac{x}{2a + 3} + \frac{2a - 1}{x} = \frac{2(2a + 1)}{2a + 3}$ .

7.  $\frac{(m - 2)x}{m - 1} - 1 = \frac{m + 2}{m - 1} - \frac{2x^2 + m + 1}{(m - 1)x}$ .

8. Решите уравнение  $\frac{x - a}{x - 2} + \frac{10}{x + 2} + \frac{44}{x^2 - 4} = 0$ .

9. Решите уравнение  $\frac{1}{k} - \frac{2}{x - k} + \frac{2k + 1}{x(x - k)} = \frac{1}{kx(x - k)}$ .

10. Решите уравнение  $\frac{3x^2 - 2}{a^2 + 3a} + \frac{x - 1}{a + 3} + \frac{2}{a} = 0$ .

11. При каких значениях параметра  $a$  разность корней уравнения  $2x^2 - (a + 2)x + (2a - 1) = 0$  равна их произведению?

● В. 1. Решите уравнение  $1 + \frac{5a - 3}{x - a} = \frac{5(2a + 1)(1 - a)}{(x - a)(x - 3a + 1)}$ .

2. Сколько решений может иметь уравнение  $|x| - 5 = -\frac{a - 4}{|x|}$  в зависимости от параметра  $a$ ?

3. Решите уравнение  $3 + \frac{2a - 3}{(x - 2)(x + a)} = \frac{2x + 5a}{x + a}$ .

4. Решите уравнение  $\frac{x}{n} + \frac{1}{n(x - 2)} = \frac{\kappa(x + 2)}{m(x - 2)} + \frac{1}{m(x - 2)}$ .

5. Решите уравнение  $\frac{2a}{x^2 - 1} = \frac{b}{a - bx} \left( \frac{a}{x - 1} - b \right)$ .

6. Решите уравнение  $\frac{7a - b + x}{7b - a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a + 5b + x}{b + 5a + x}$ .

3. При каких значениях параметра  $a$  корни  $x_1$  и  $x_2$  уравнения  $(3a + 2)x^2 + (a - 1)x + 4a + 3 = 0$  удовлетворяют условиям  $x_1 < -1 < x_2 < 1$ ?

4. При каких значениях параметра  $a$  ровно один корень уравнения  $x^2 - 4x + a = 0$ , имеющего различные корни, принадлежит интервалу  $(1; 4)$ ?

● Б. 1. При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $\frac{x + 3a - 5}{x + a} > 0$  справедливо для всех таких  $x$ , что  $1 \leq x \leq 4$ ?

2. При каких значениях параметра  $a$  из неравенства  $1 < x \leq 2$  следует неравенство  $x^2 - 2ax + a < 0$ ?

3. При каких значениях параметра  $a$  для квадратного трехчлена  $f(x) = ax^2 + bx + c$  имеют место неравенства  $f(-1) < 1$ ,  $f(1) > -1$ ,  $f(3) < -4$ ?

4. При каких значениях параметра  $a$  из неравенства  $ax^2 - x + 1 - a < 0$  следует неравенство  $0 < x < 1$ ?

5. При каких значениях параметра  $a$  из неравенства  $0 \leq x \leq 1$  следует неравенство  $(a^2 + a - 2)x^2 - (a + 5)x - 2 \leq 0$ ?

6. При каких значениях параметра  $a$  корни уравнения  $ax^2 - (a^3 + 2a^2 + 1)x + a(a + 2) = 0$  принадлежат отрезку  $[0; 1]$ ?

● В. 1. При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $\frac{ax - a(1 - a)}{a^2 - ax - 1} > 0$  выполняется для всех значений  $x$  таких, что  $|x| \leq 1$ ?

2. Найдите все значения  $a$ , при которых любое значение  $x$ , удовлетворяющее неравенству  $ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$ , по модулю не превосходит 2.

3. При каких значениях параметра  $a$  корни уравнения  $x^2 - 2(a - 1)x + 2a + 1 = 0$  имеют разные знаки, и оба по абсолютной величине меньше 4?

4. При каких значениях параметра  $a$  всякое решение неравенства  $x^2 - 3x + 2 < 0$  будет одновременно решением неравенства  $ax^2 - (3a + 1)x + 3 > 0$ ?

**Тема 6. Графические интерпретации. Свойства функций в задачах с параметрами.**

**Дидактические материалы**

**А. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение имеет единственное решение:**

1.  $x|x - 2a| = 1 + a$ ;

2.  $x|x + 2a| + 1 - a = 0$ ;

3. Решите уравнение  $\sqrt{x+a} = x-b$ .

**Б. 1. Решите уравнение  $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = a$ .**

2. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $3\sqrt{x+2} = 2x+a$  имеет решение?

3. Решите неравенство  $|x - 4| > ax$ .

**В. 1. Решите неравенство  $x - b > \sqrt{x+a}$ ;**

2. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $|3 - |x|| - |x - 5| = a$  имеет бесконечное множество решений.

3. Решите уравнение  $a^{2x-3} - a^{2x-2} + a^{30,6x} = b$ , где  $a > 0$ .

**Тема 7,8,9. Трансцендентные уравнения и неравенств**

**Дидактические материалы**

11. Найдите все значения  $a$ , при которых неравенство  $1 - \log_{\frac{1}{7}}(x^2 + 1) \geq \log_7(ax^2 + 4x + a)$  справедливо при всех  $x$ .

12. При каких значениях  $a$  уравнение  $1 - x = \sqrt{x^2 - 2\sin^2 a}$  имеет решения? Найдите эти решения.

Решите относительно  $x$ :

13.  $\sin |2x - 2| = a$ ;

14.  $\cos^2(x + a) + \cos^2(x - a) = \sin 2a$ ;

15.  $\cos^2(x + 1) < a, (0 < a < 1)$ .

В. Решите уравнения:

1.  $4^x - 6 \cdot 2^x + 1 = 2^x - a$ ;

2.  $\log_3(31 - |x^2 - 6x + 5|) = c$ ;

3.  $-\log_5(2 - |x - b|) = \log_{0,2}(5 - x)$ .

4. Найдите все значения  $a$ , при которых неравенство  $a \cdot 9^x + 4(a - 1) \cdot 3^x + a > 1$  выполняется при всех  $x$ ;

5. Найдите все значения  $c$ , при которых неравенство  $1 + \log_2(2x^2 + 2x + \frac{7}{2}) \geq \log_2(cx^2 + c)$  имеет хотя бы одно решение.

6. Для каких значений  $a$  неравенство  $4^{x+1} + 9 \cdot 4^{-x} - 2(2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x}) \geq a$  выполняется при всех  $x \geq 0$ ?

7. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых неравенство  $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2x^2 + ax + 5} + 1) \cdot \log_5(x^2 + ax + 6) + \log_a 3 \geq 0$  имеет ровно одно решение.

8. Сколько существует целых значений  $a$ , при которых уравнение  $1 + a \cos x = (a + 1)^2$  имеет хотя бы одно решение?

9. При каких значениях параметра  $c$  уравнение  $x^2 - 2c \sin(\cos x) + 2 = 0$  имеет единственное решение?

10. При каких значениях  $a$  уравнения  $\sin x = 2 \sin^2 x$  и  $\sin 3x = (a + 1) \sin x - 2|a - 1| \sin^2 x$  равносильны?

11. Решите неравенство  $|\sin(2x - 4)| \leq b (0 < b < 1)$ .

Ответы и решения:



## Тема 10. Иррациональные уравнения и неравенства

### Самостоятельная работа №1

#### Вариант 1

1. Решите уравнение  $ax^2 + 3ax - (a+2) = 0$
2. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых сумма корней и сумма квадратов корней уравнения равны  $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$

#### Вариант 2

1. Решите уравнение  $x^2 + ax + a + 2 = 0$
2. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых оба корня уравнения больше  $-1$ .

### Самостоятельная работа №2

#### Вариант 1и

1. При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $(a-1)x^2 - 4x < a+4$  справедливо при всех  $x < 0$  ?
2. Решить неравенство при всех значениях параметра  $a$   $\frac{x^2+a^2}{a(x+6)} \geq 0$ .

#### Вариант 2

1. При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $(a+4)x^2 - 3ax + 2a^2 - 5a < 0$  справедливо при всех  $x > 0$  ?
2. Решить неравенство при всех значениях параметра  $a$   $\frac{3x^2+ax-6}{1-x+x^2} < 6$ .

### Самостоятельная работа №3

#### Вариант 1

1. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(\sin 3x)^2 - (a+0,5) \sin 3x + 0,5a = 0$  имеет ровно три корня на отрезке  $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ ?
2. При каких значениях параметра  $a$  число  $\pi$  является периодом функции  $f(x) = \frac{\sin x}{a - \cos x}$  ?
3. При каких значениях параметра  $a$  уравнения являются равносильными  $\cos x^2 = 1$ ,  $4\sin x = a\sin 2x$ .

#### Вариант 2

1. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $2(a^2+1) \cos x^2 + 4a \cos x + 1 = 0$  не имеет решений?
2. Найдите наименьшее положительное значение параметра  $a$ , при котором функция  $f(x) = 3ax^3 - 2\sin\left(\frac{8\pi a}{5} - \frac{x}{5}\right)$  является нечетной?
3. Сколько решений имеет уравнение  $\cos x \operatorname{ctg} x - \sin x = a \cos 2x$  на интервале  $(0, 2\pi)$ ?

## Самостоятельная работа №4

### Вариант 1

1. Найти все значения параметра  $a$ , при которых функция

$F(x) = 2x^3 - 3(a+2)x^2 + 48ax + 6x - 5$  возрастает на всей числовой прямой.

2. При каких значениях параметра  $a$  наибольшее значение функции  $f(x) = x^3 + 5ax^2 + 2a$  на отрезке  $[2\sqrt{3}, 2]$  достигается в двух различных точках?

3. В пирамиде ABCD проводятся сечения параллельные ребрам AD и BC. В каком отношении сечение наибольшей площади делит ребро AC?

### Вариант 2

1. При каких значениях параметра  $a$  из точки  $M(a, -1)$  можно провести три различные касательные к графику функции  $f(x) = x^3 - 3x - 1$ ?

2. При каких значениях параметра  $a$  наименьшее значение функции  $f(x) = x^3 - 2ax$  на промежутке  $[0, 1]$  достигается на правом конце?

3. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Второй шар, имеющий радиус 1, касается первого шара и всех боковых граней пирамиды. При каком значении радиуса первого шара пирамида имеет наименьший объем?

## Самостоятельная работа №4

### Вариант 1

1. Найдите все значения параметра  $a$  при которых множество решений  $\frac{a}{a-x} > 0$  неравенства содержит точку  $x=1$ .

2. Для каждого значения  $c$  решите неравенство  $\sqrt{c^2 - x^2} \geq 2 - c$ .

### Вариант 2

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при котором уравнение  $\log_{a-6,5}(x^2 + 1) = \log_{a-6,5}(a^2 - 5)x$  имеет два различных решения.

2. Для каждого значения  $c$  решите неравенство  $c - 2 < (c-1)\sqrt{x^3 + 1}$