Площадь параллелограмма

Погорелая Наталия Владимировна
Учитель математики
МАОУ «СОШ №73 г. Челябинска»

Теорема: Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

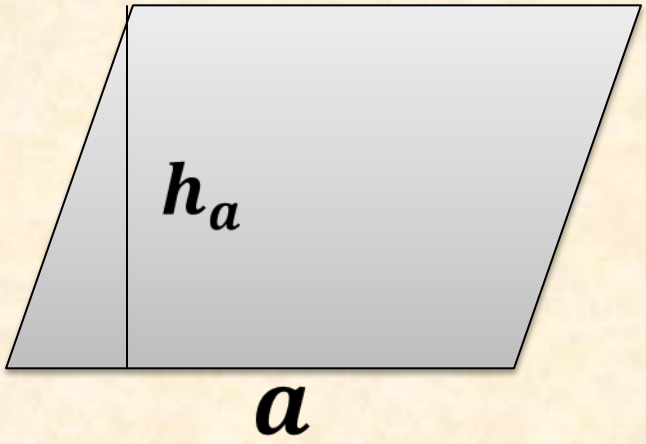
$$S = ah_a$$

a – основание

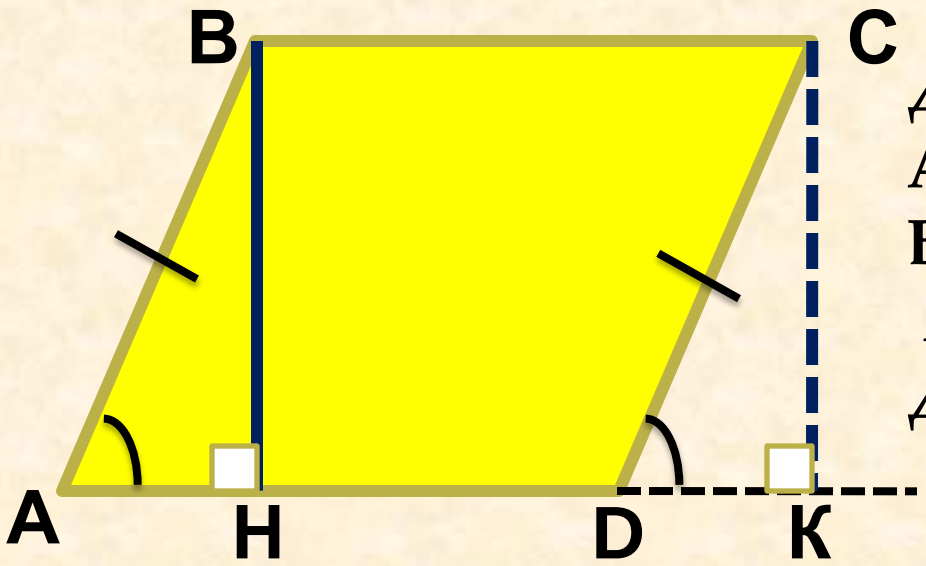
h_a – высота

$$a = S:h_a$$

$$h_a = S:a$$



Площадь параллелограмма



Дано:
ABCD -параллелограмм,
BH - высота
AD - основание
Доказать: S = AD·BH

Доказательство:

1) Рассмотрим $\Delta ABH = \Delta DCK$:

$AB = DC$

$\angle BAH = \angle CDK$ (соответственные углы при $AB \parallel CD$)

$\Rightarrow \Delta ABH = \Delta DCK$ (по гипотенузе и острому углу)

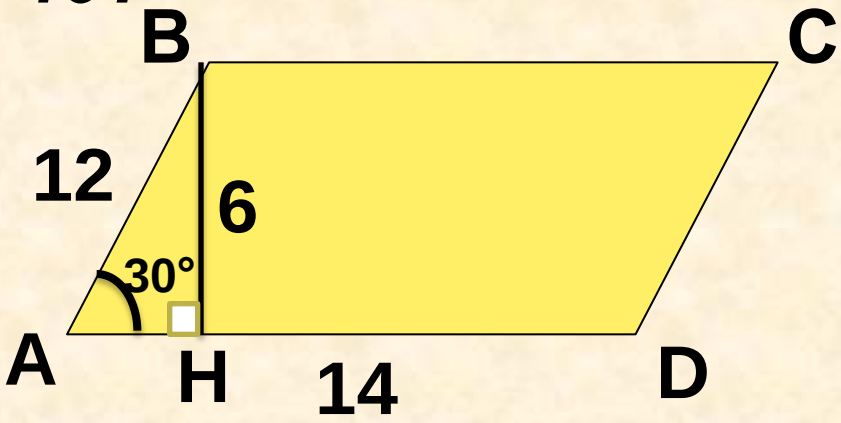
2) Т.к. $\Delta ABH = \Delta DCK \Rightarrow S_{ABH} = S_{DCK} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{BCKH}$

3) $S_{HBCK} = BC \cdot BH$, т. к. $BC = AD \Rightarrow S_{HBCK} = AD \cdot BH$

4) Т.к. $S_{ABCD} = S_{BCKH} \Rightarrow S_{ABCD} = AD \cdot BH$

ч.т.д.

№ 461



Дано:

ABCD -параллелограмм,

AB = 12 см, AD = 14 см,

$\angle A = 30°$

Найти: S_{ABCD}

Доказательство:

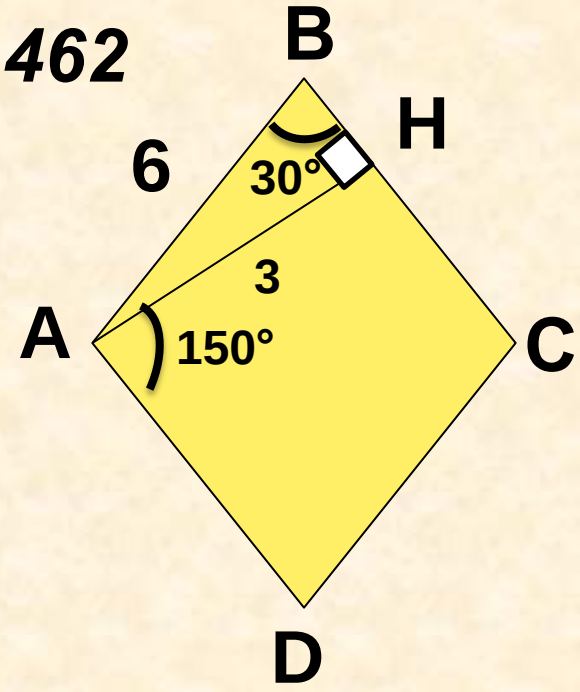
1) $S_{ABCD} = a \cdot h$

2) **BH = 1/2AB = 6 см, (т.к. BH катет, лежащий против угла в 30 градусов)**

3) $S_{ABCD} = 14 \cdot 6 = 84$ см^2

Ответ: 84 см^2

№ 462



Дано:

ABCD -ромб,

AB = 6 см,

$\angle A = 150°$

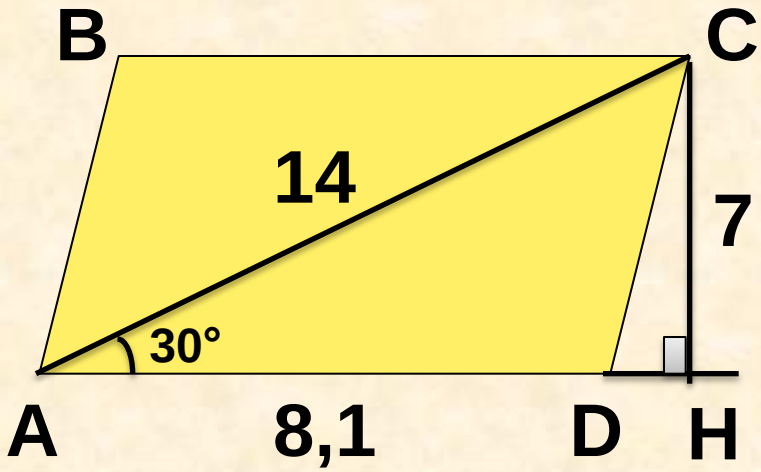
Найти: S_{ABCD}

Доказательство:

1) $S_{ABCD} = a \cdot h$
2) $\angle B = 180° - 150° = 30°$
3) AH = 1/2AB = 3 см, (т.к. BH катет, лежащий против угла в 30 градусов)
4) $S_{ABCD} = 6 \cdot 3 = 18$ см^2

Ответ: 18 см^2

№ 463



Дано:

ABCD – парал-м

AD = 8,1 см

AC = 14 см

$\angle CAD = 30°$

Найти: S_{ABCD}

Решение:

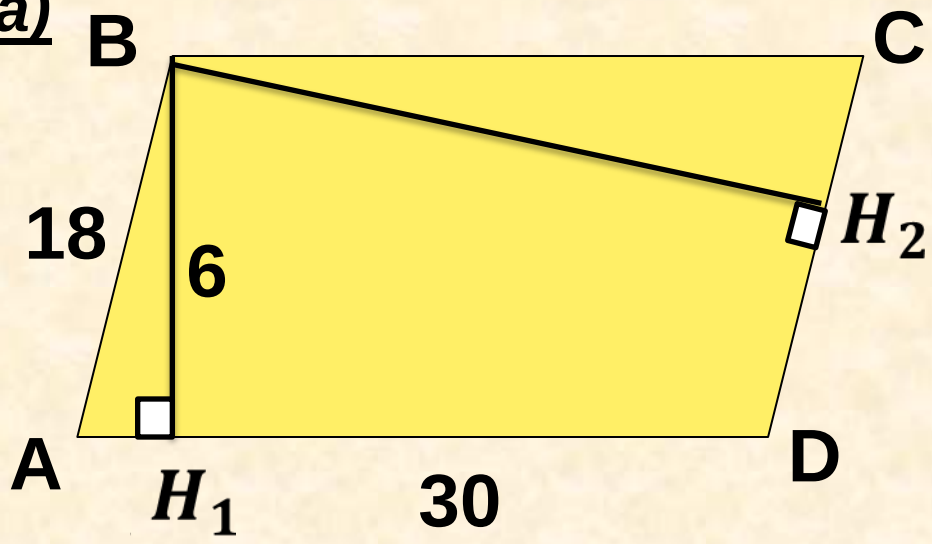
1) $S = a \cdot h_a$

2) CH = 1/2AC = 14 : 2 = 7 см (катет, лежащий против угла в 30°)

3) $S_{ABCD} = 7 \cdot 8,1 = 56,7$ см^2

Ответ: $56,7$ см^2

№ 464 а)



Дано:

ABCD – парал-м

AB = 18 см

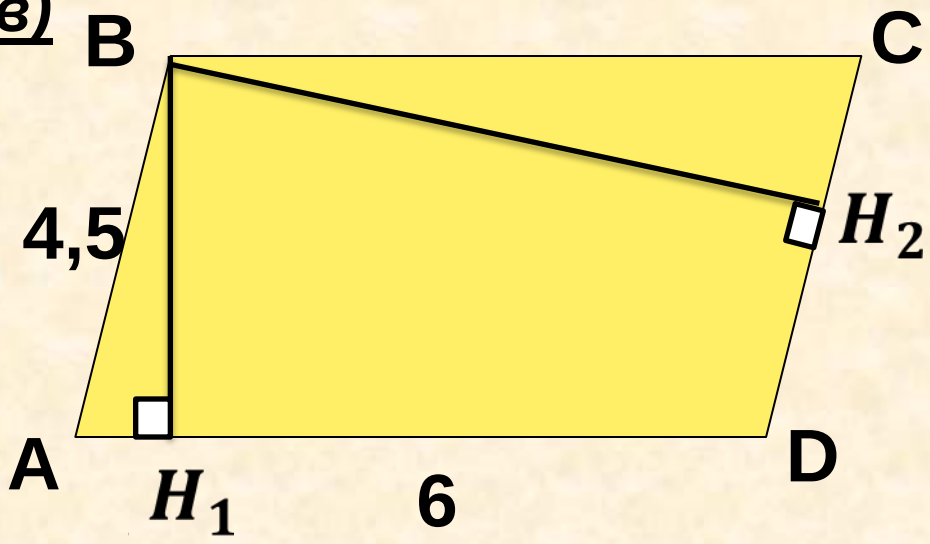
AD = 30 см

BH_1 = 6 см

Найти: BH_2

Решение:

№ 464 в)



Дано:

ABCD – парал-м

AB = 4,5 см

AD = 6 см

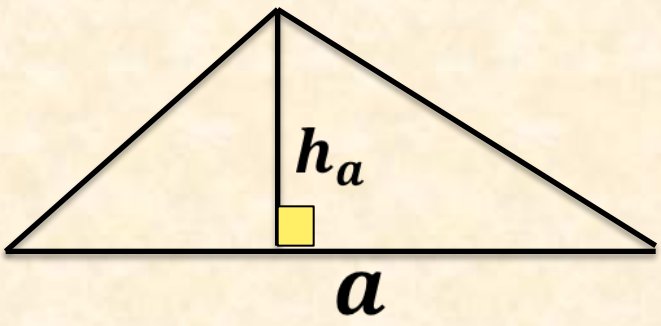
S = 54 см^2

Найти: BH_1, BH_2

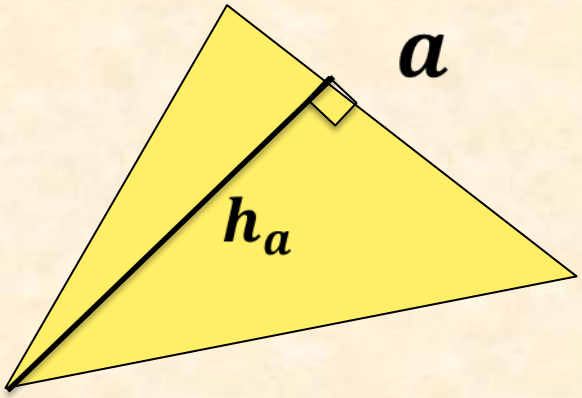
Решение:

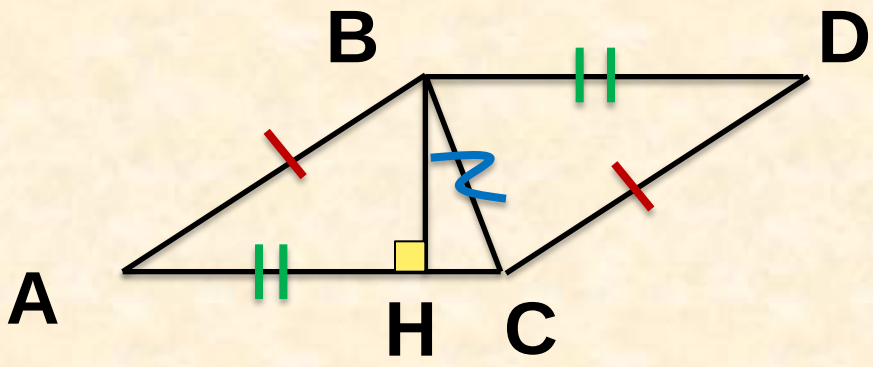
Площадь треугольника

Теорема: **Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.**



$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$





Дано:

ABC – треугольник

BH - высота

AC - основание

Доказательство:

Доказать: $S = \frac{1}{2} BH \cdot AC$

1) Достроим ΔABC до параллелограмма $ABDC$

2) Рассмотрим ΔABC и ΔBCD:

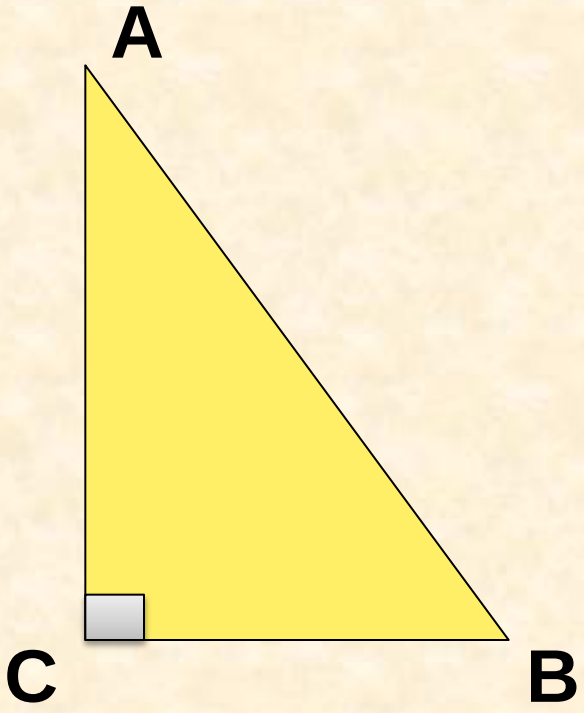
AB = CD
BD = AC
BC - общая

$\Longrightarrow$ $\Delta ABC = \Delta BCD$ **(по трём сторонам)** $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow S_{ABC} = S_{BCD} \Longrightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABDC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC$$

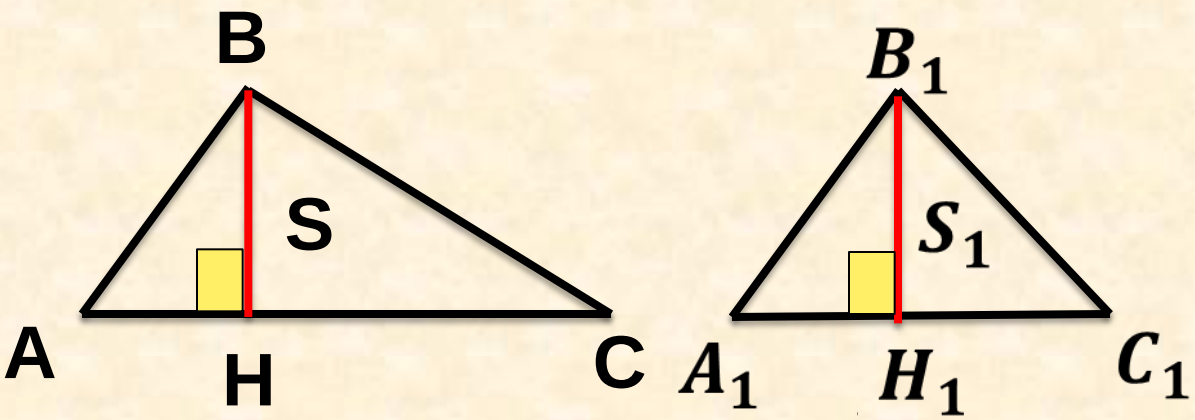
ч.т.д.

<u>Следствие 1:</u> **Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.**



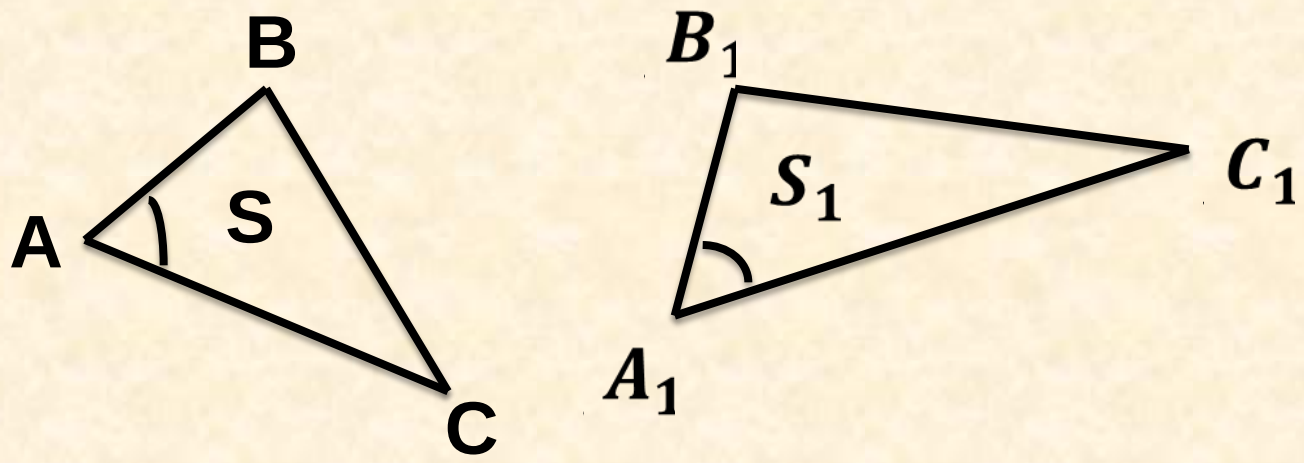
$$S = \frac{1}{2} AC \cdot CB$$

<u>Следствие 2:</u> **Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.**



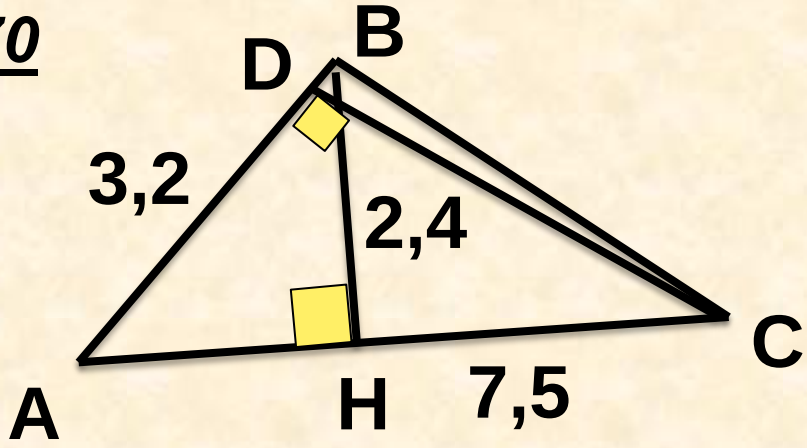
$$\frac{S}{S_1} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot BH}{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot BH} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

<u>Теорема:</u> **Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.**



$$\textit{Если } \angle A = \angle A_1, \textit{ то } \frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$$

№ 470



Дано:

ABC – треугольник

AB = 3,2 см

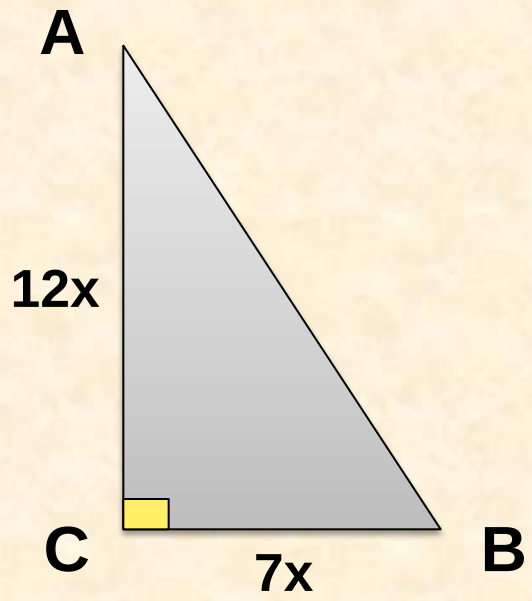
AC = 7,5 см

BH = 2,4 см

Найти: CD

Решение:

№ 472



Дано:

ABC – прямоугольный треугольник

S = 168 см^2

$$\frac{CB}{AC} = \frac{7}{12}$$

Найти: AC, CB

Решение:

1) Пусть x – 1 часть, тогда AC = 12x, CB = 7x

2) $S = \frac{1}{2} AC \cdot CB$

$$168 = \frac{1}{2} \cdot 12x \cdot 7x$$

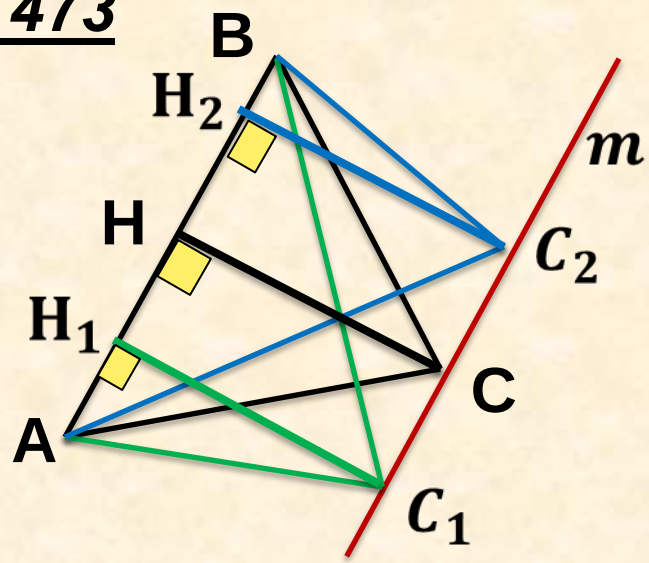
$$168 = 42x^2 \quad |:42$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \qquad \Rightarrow \text{AC} = 2 \cdot 12 = 24 \text{ см}, CB = 2 \cdot 7 = 14 \text{ см}$$

Ответ: AC = 24 см, CB = 14 см

№ 473



Дано:

ABC – треугольник

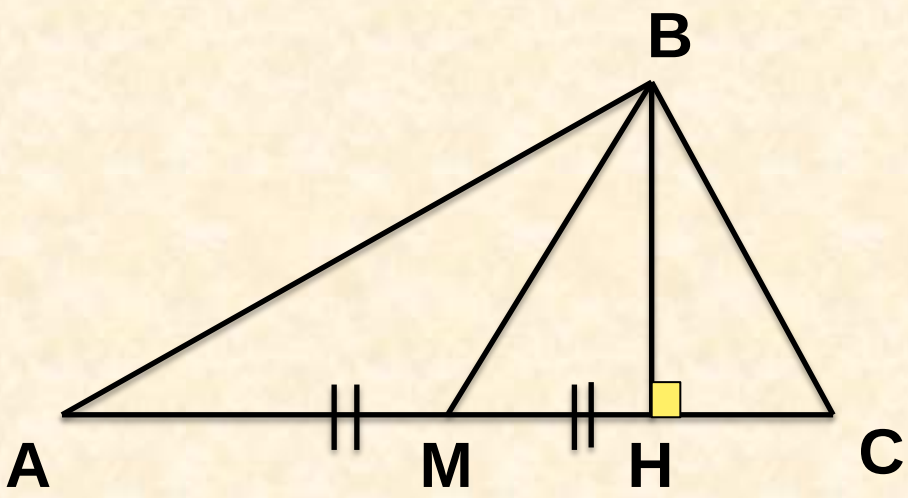
$AB \| m$

Доказать: $S_{ABC} = S_{ABC_1} = S_{ABC_2}$

Доказательство:

1) $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$

№ 474



Дано:

ABC – треугольник

BM - медиана

Сравните: S_{ABM} и S_{BMC}

Решение:

1) Рассмотри площадь ΔMBC:

$$S = \frac{1}{2}\text{BH} \cdot MC$$

2) Рассмотри площадь ΔABM:

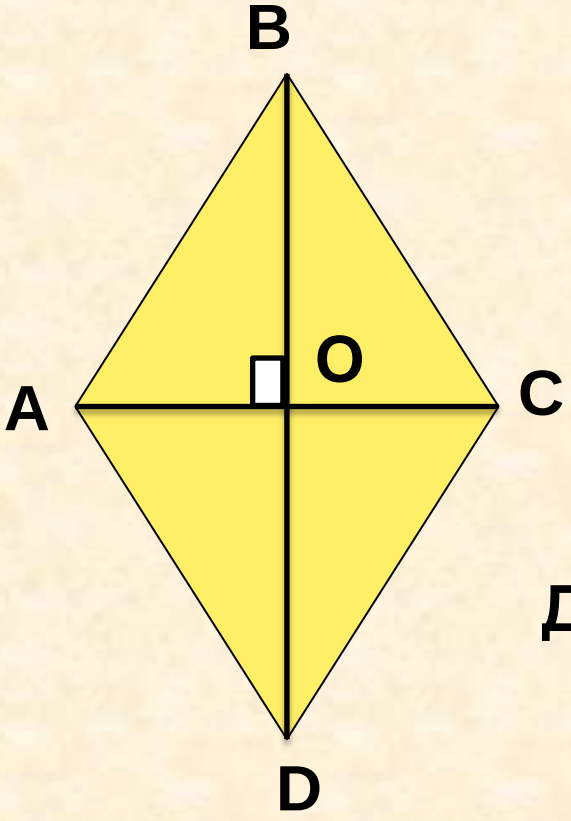
$$S = \frac{1}{2}\text{BH} \cdot AM$$

4) У треугольников совпала высота, AM = MC

$$\Rightarrow S_{ABM} = S_{MBC}$$

Площадь ромба

Теорема: Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.



Дано:

ABCD - ромб

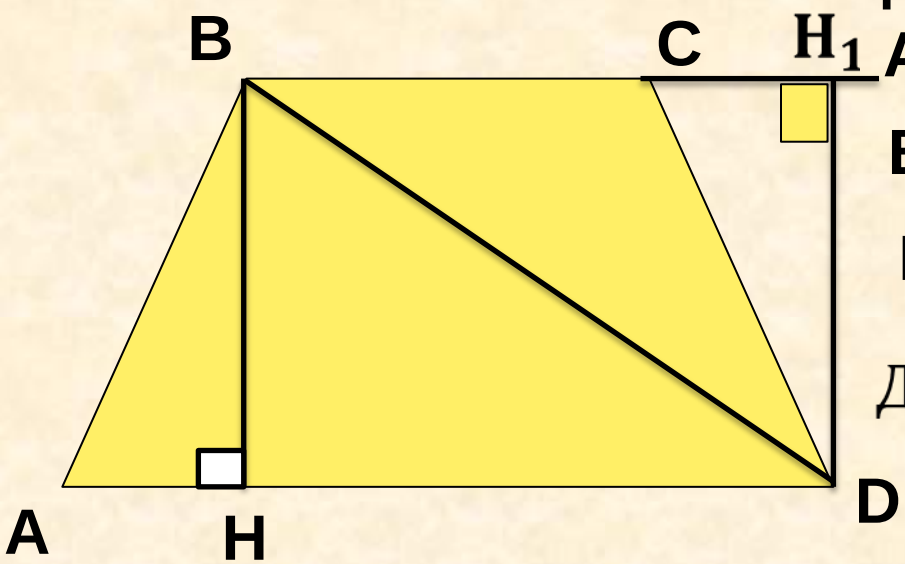
AC, BD - диагонали

$$S = \frac{1}{2} BH \cdot AM$$

Доказательство:

Площадь трапеции

Теорема: Площадь трапеции равна произведению полу суммы её оснований на высоту.



Дано:

ABCD - трапеция

BH - высота

BC, AD - основания

Доказать: $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH$

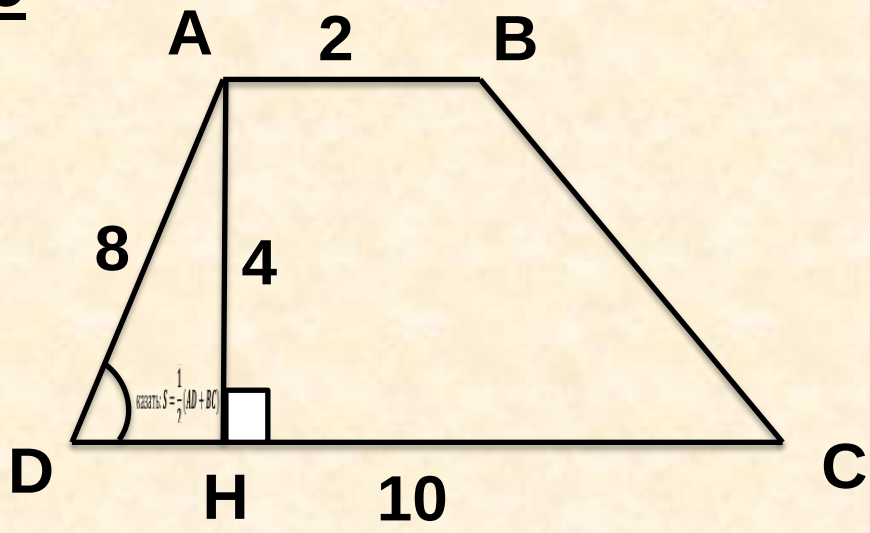
Доказательство:

1) Проведём диагональ BD.

$\Rightarrow S_{ABM} = S_{MBC}$

3) $S_{DBC} = \frac{1}{2} BC \cdot DH_1$

№ 480б



Дано:

ABCD – трапеция

$\angle D = 30°$

H_1

$S_{DBC} = \frac{1}{2} BC \cdot DH_1$

$AD = 8$ см

Найти: S_{ABCD}

Решение:

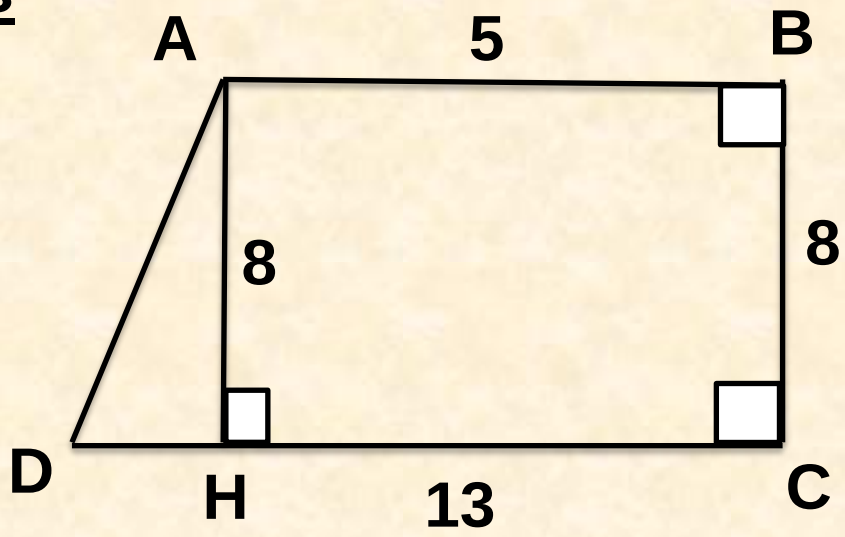
$$1)\ S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot AH$$

$$2)\ AH = \frac{1}{2} AD = 4 \text{ (катет, лежащий против угла в } 30°)$$

$$3)\ S_{ABCD} = \frac{1}{2}(2 + 10) \cdot 4 = 24 \text{ см}^2$$

Ответ: 24 см^2

№ 480в



Дано:

ABCD – прямоугольная трапеция

$AB = 5$ см

$BC = 8$ см

$CD = 13$ см

Найти: S_{ABCD}

Решение:

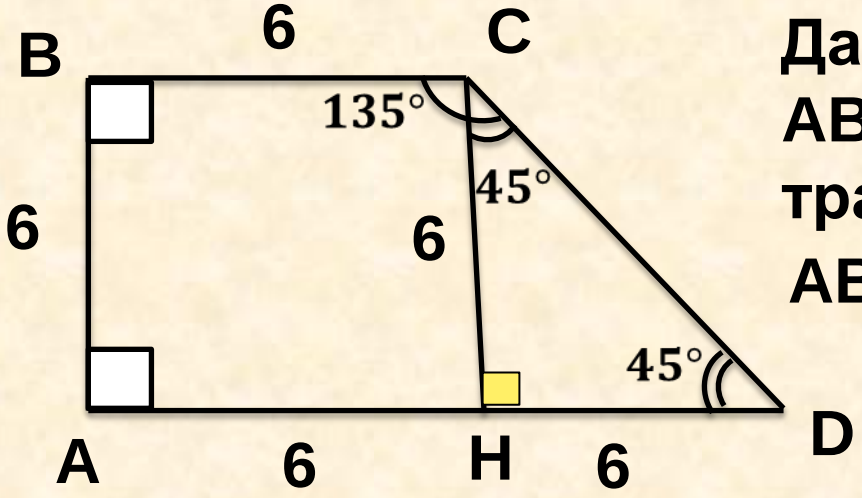
1) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot AH$

2) $BC = AH = 8$ см

3) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(5 + 13) \cdot 8 = 72$ см^2

Ответ: 72 см^2

№ 481



Дано:

ABCD – прямоугольная трапеция

AB = BC = 6 см

$\angle C = 135°$

Найти: S_{ABCD}

Решение:

1) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CH$

2) $AB = CH = 6$ см 3) $BC = AH = 6$ см

4) $\angle HCD = 135° - 90° = 45°$ 5) $\angle D = 90° - 45° = 45°$

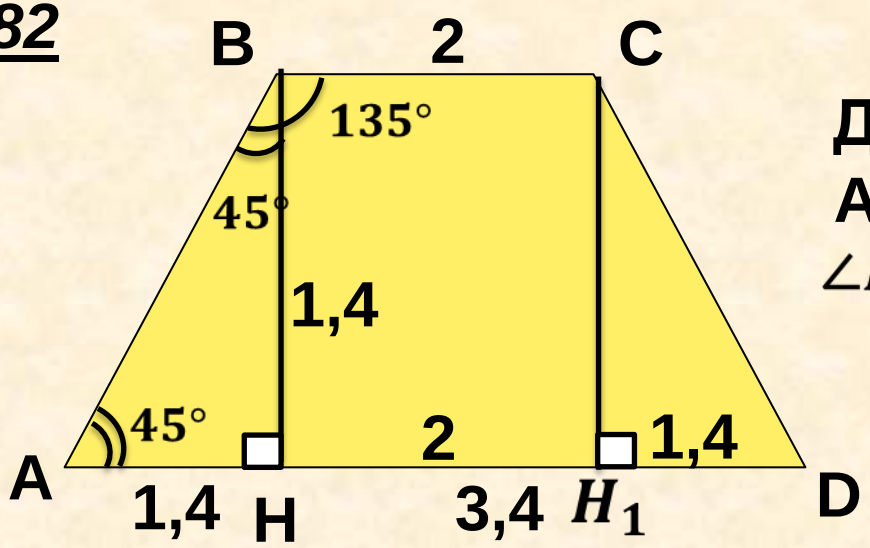
6) т. к. $\angle HCD = \angle D \Rightarrow \Delta CHD$ – р/б $\Rightarrow CH = HD = 6$ см

7) $AD = AH + HD = 6 + 6 = 12$ см

8) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(12 + 6) \cdot 6 = 54$ см^2

Ответ: 54 см^2

№ 482



Дано:

ABCD – р/б трапеция

$\angle B = 135°$

$AH = 1,4$ см

$HD = 3,4$ см

Найти: S_{ABCD}

Решение:

1) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH$ 2) Проведём высоту CH_1.

3) $AH = H_1D = 1,4$ см $\Rightarrow HH_1 = 3,4 - 1,4 = 2$ см

4) $BC = HH_1 = 2$ см 5) $\angle ABH = 180° - 135° = 45°$

6) $\angle A = 90° - 45° = 45°$ 6) т. к. $\angle ABH = \angle A \Rightarrow \Delta ABH$ – р/б

$\Rightarrow AH = BH = 1,4$ см

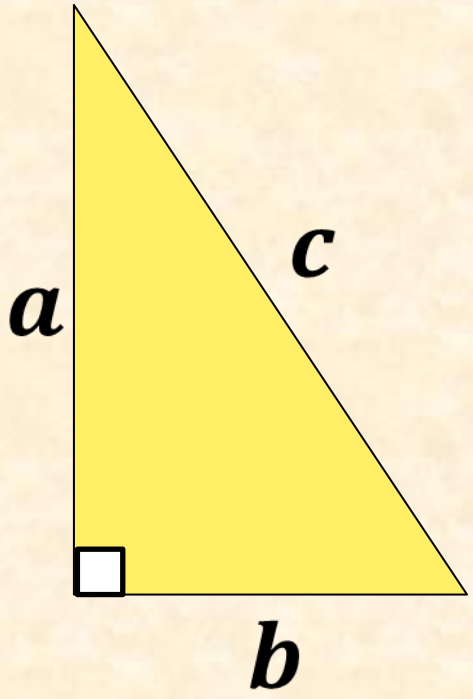
7) $AD = AH + HD = 1,4 + 3,4 = 4,8$ см

8) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(4,8 + 2) \cdot 1,4 = 4,76$ см^2

Ответ: $4,76$ см^2

Теорема Пифагора.

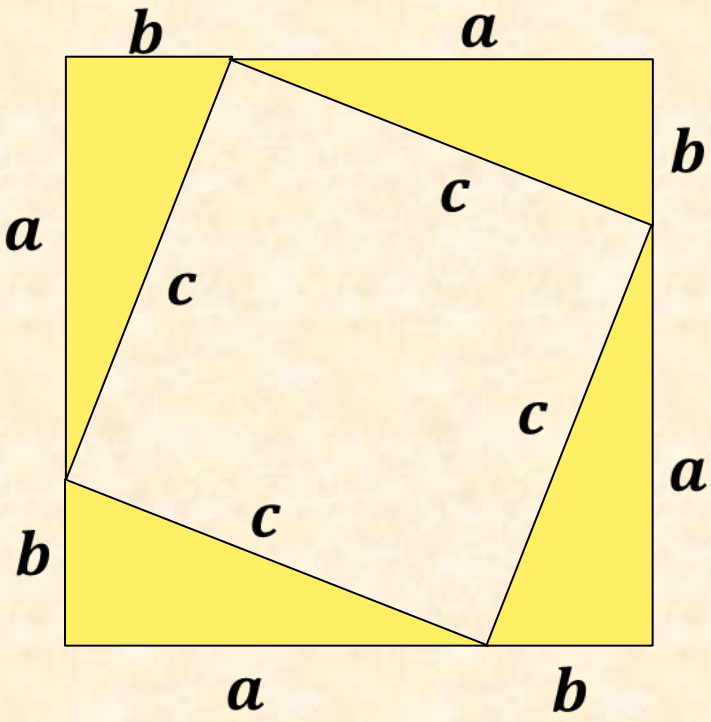
<u>Теорема Пифагора:</u> **В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.**



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$



Дано:
АВС – прямоугольный треугольник

Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$

Доказательство:

1) Достроим треугольник до квадрата со стороной $a + b$

2) $S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot b$ 3) $S_{\text{мал}\,\blacksquare} = c^2$

3) $S_{\text{бол}\,\blacksquare} = (a+b)^2$ **или** 4) $S_{\text{бол}\,\blacksquare} = 4S_{\Delta} + S_{\text{мал}\,\blacksquare} = 4 \cdot \frac{1}{2} ab + c^2 =$

$= 2ab + c^2$

5) $(a+b)^2 = 2ab + c^2$

$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = \cancel{2ab} + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{или} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

Ч.т.д.

<u>Теорема, обратная теореме Пифагора:</u> **Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.**

Если для треугольника выполняется $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$, то треугольник является прямоугольным